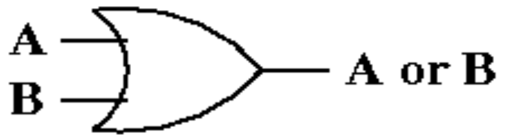
Esercitazioni su circuiti combinatori

slide a cura di Salvatore Orlando e Marta Simeoni

Algebra Booleana: funzioni logiche di base

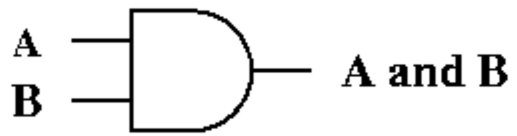
OR (somma): l'uscita è 1 se almeno uno degli ingressi è 1

A	B	(A + B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



AND (prodotto): l'uscita è 1 se tutti gli ingressi sono 1

A	B	(A · B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



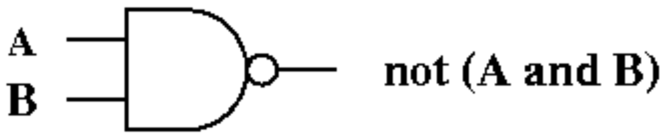
Algebra Booleana: funzioni logiche di base

NOT (complemento): l’uscita è il complemento dell’ingresso

A	~A
0	1
1	0

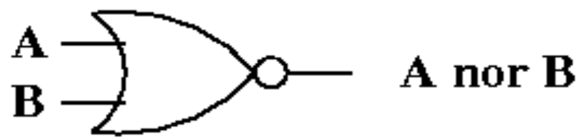
NAND

A	B	~(A · B)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

A	B	~(A + B)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Algebra booleana: equazioni

Come si dimostra che due funzioni logiche sono uguali?

Ci sono due metodi:

- Costruire la tabella di verità delle due funzioni e verificare che, per gli stessi valori dei segnali di ingresso, siano prodotti gli stessi valori dei segnali di uscita

- Sfruttare le proprietà dell'algebra booleana per ricavare una funzione dall'altra (tramite sequenze di equazioni)

Algebra booleana: equazioni

Come si dimostra che due funzioni logiche sono uguali?

Esempio: considerare le leggi di De Morgan

$$\sim(A \bullet B) = (\sim A) + (\sim B)$$

A	B	(A·B)	~(A·B)	~A	~B	(~A)+(~B)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Algebra booleana: equazioni

Come si dimostra che due funzioni logiche sono uguali?

Esempio: considerare le leggi di De Morgan

$$\sim(A+B) = (\sim A) \bullet (\sim B)$$

$$\begin{aligned}
\sim A\sim B &= \sim A\sim B + 0 = \sim A\sim B + [\sim(A+B) \cdot (A+B)] = \\
&[\sim A\sim B + \sim(A+B)] \cdot [\sim A\sim B + (A+B)] = \\
&[\sim A\sim B + \sim(A+B)] \cdot [(\sim A + A) \cdot (\sim B + A) + B] = \\
&[\sim A\sim B + \sim(A+B)] \cdot [\ \sim B + A + B] = (\sim A\sim B) + \sim(A+B) \\
\sim A\sim B &= \sim A\sim B \cdot 1 = \ \sim A\sim B \cdot [\sim(A+B) + (A+B)] = \\
&(\sim A\sim B) \cdot \sim(A+B) + (\sim A\sim B) \cdot (A+B) = \\
&(\sim A\sim B) \cdot \sim(A+B) + [\sim A\sim B\, A \ + \sim A\sim B\, B] = (\sim A\sim B) \cdot \sim(A+B) \\
\sim A\sim B &= \sim A\sim B + \sim(A+B) \quad = \quad ((\sim A\sim B) \cdot \sim(A+B)\ ) \ + \ \sim(A+B) = \\
&\sim(A+B) \cdot [\ (\sim A\sim B) + 1\ ] = \sim(A+B)
\end{aligned}$$

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati tre ingressi A, B, C realizzare un circuito che fornisca in uscita tre segnali

D è vera se almeno uno degli ingressi è vero

E è vera se esattamente due input sono veri

F è vera se tutti e tre gli input sono veri

Intuitivamente le equazioni sono:

$$D = A + B + C$$

$$F = ABC$$

$$E = (AB + BC + AC) \cdot \sim(ABC)$$

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati tre ingressi A, B, C realizzare un circuito che fornisca in uscita tre segnali

D è vera se almeno uno degli ingressi è vero
E è vera se esattamente due input sono veri
F è vera se tutti e tre gli input sono veri

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Tabella di verità

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati tre ingressi A, B, C realizzare un circuito che fornisca in uscita tre segnali

D è vera se almeno uno degli ingressi è vero
E è vera se esattamente due input sono veri
F è vera se tutti e tre gli input sono veri

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Prodotti di somme (PS):

D = A+B+C

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati tre ingressi A, B, C realizzare un circuito che fornisca in uscita tre segnali

D è vera se almeno uno degli ingressi è vero
E è vera se esattamente due input sono veri
F è vera se tutti e tre gli input sono veri

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Prodotti di somme (PS):

D = A+B+C

E = (A+B+C) (A+B+~C) (A+~B+C) (~A+B+C) (~A+~B+~C)

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati tre ingressi A, B, C realizzare un circuito che fornisca in uscita tre segnali

D è vera se almeno uno degli ingressi è vero
E è vera se esattamente due input sono veri
F è vera se tutti e tre gli input sono veri

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Prodotti di somme (PS):

D = A+B+C

E = (A+B+C) (A+B+~C) (A+~B+C) (~A+B+C) (~A+~B+~C)

F = (A+B+C) (A+B+~C) (A+~B+C) (A+~B+~C)(~A+B+C) (~A+B+~C)(~A+~B+C)

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati tre ingressi A, B, C realizzare un circuito che fornisca in uscita tre segnali

D è vera se almeno uno degli ingressi è vero
E è vera se esattamente due input sono veri
F è vera se tutti e tre gli input sono veri

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Somme di Prodotti (SP):

D = (~A~BC)+(~AB~C)+(~ABC)+ (A~B~C)+(A~BC)+(AB~C)+(ABC)

E = (~ABC)+(A~BC)+(AB~C)

F = ABC

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione D dell'esercizio precedente

D = (~A~BC)+(~AB~C)+(~ABC)+
(A~B~C)+(A~BC)+(AB~C)+(ABC)

A \ B C	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	1

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione D dell’esercizio precedente

D = (~A~BC)+(~AB~C)+(~ABC)+
(A~B~C)+(A~BC)+(AB~C)+(ABC)

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	1

Si può considerare un rettangolo più grande di quello a sinistra, che include anche quello selezionato

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione D dell'esercizio precedente

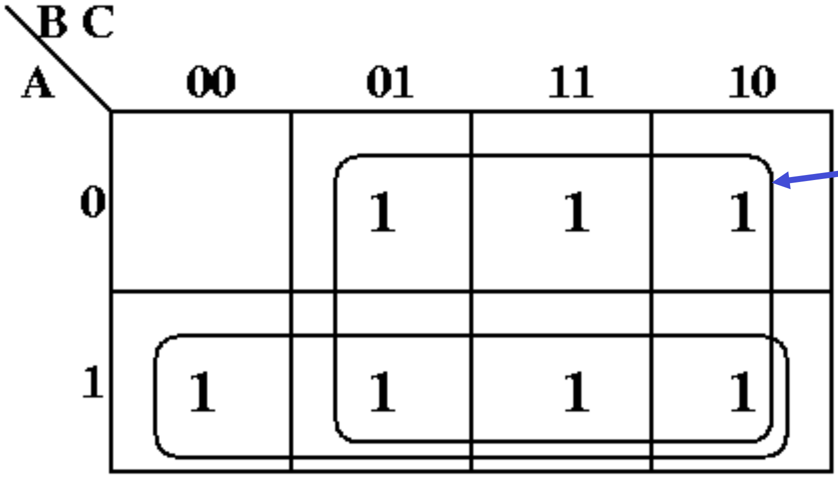
D = (~A~BC)+(~AB~C)+(~ABC)+
(A~B~C)+(A~BC)+(AB~C)+(ABC)

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	1

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione D dell’esercizio precedente

D = (~A~BC)+(~AB~C)+(~ABC)+
(A~B~C)+(A~BC)+(AB~C)+(ABC)

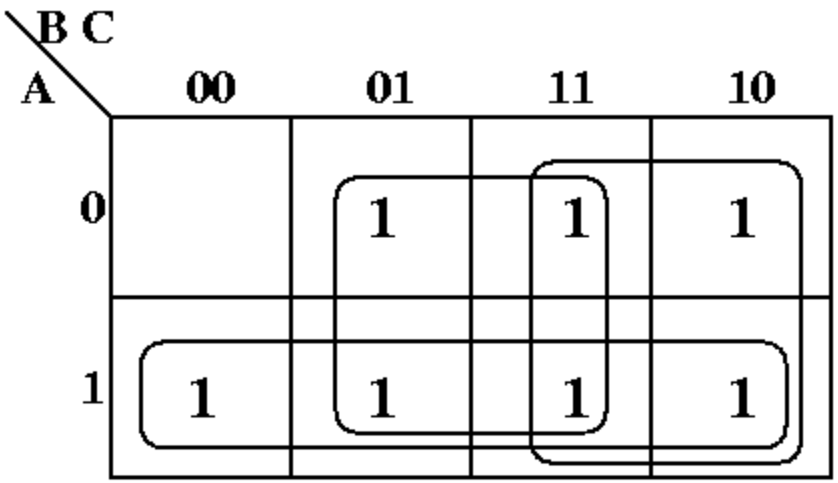


Errore!
si deve raccogliere un p-sottocubo (rettangolo di celle adiacenti) di **2**^{p} celle

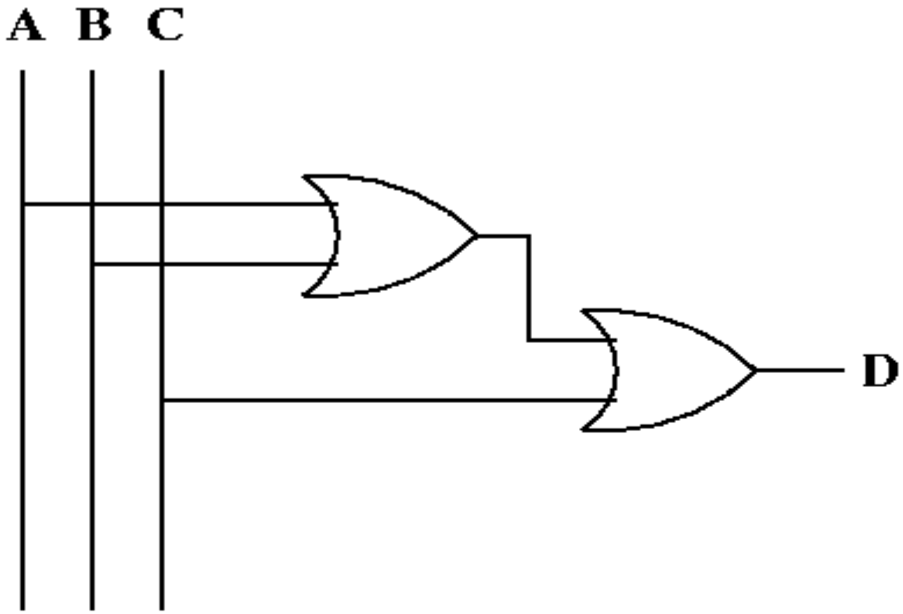
Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione D dell'esercizio precedente

D = (~A~BC)+(~AB~C)+(~ABC)+
(A~B~C)+(A~BC)+(AB~C)+(ABC)



D = A + B + C



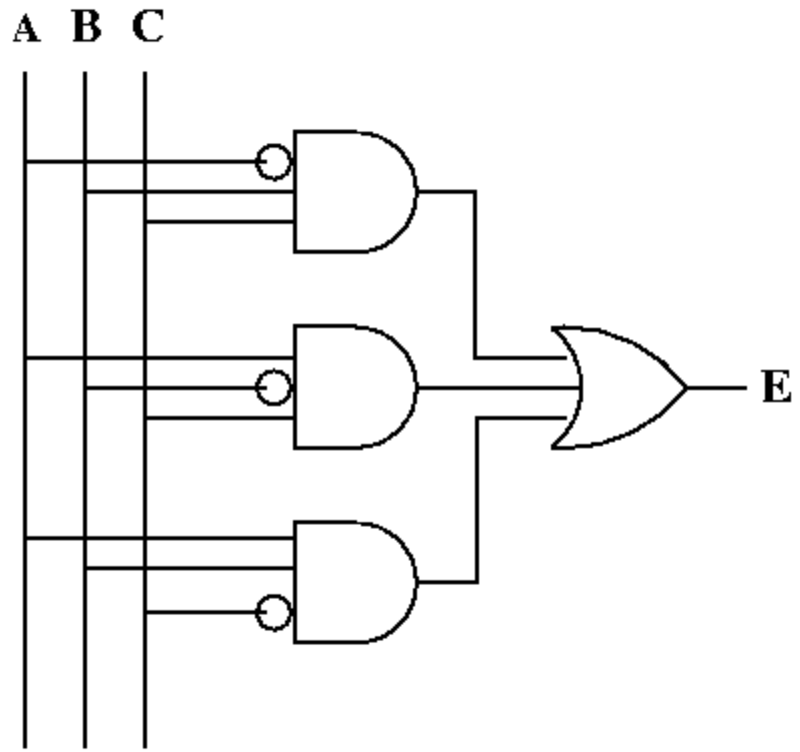
Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione E dell'esercizio precedente

E = (~ABC)+(A~BC)+(AB~C)

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1		1

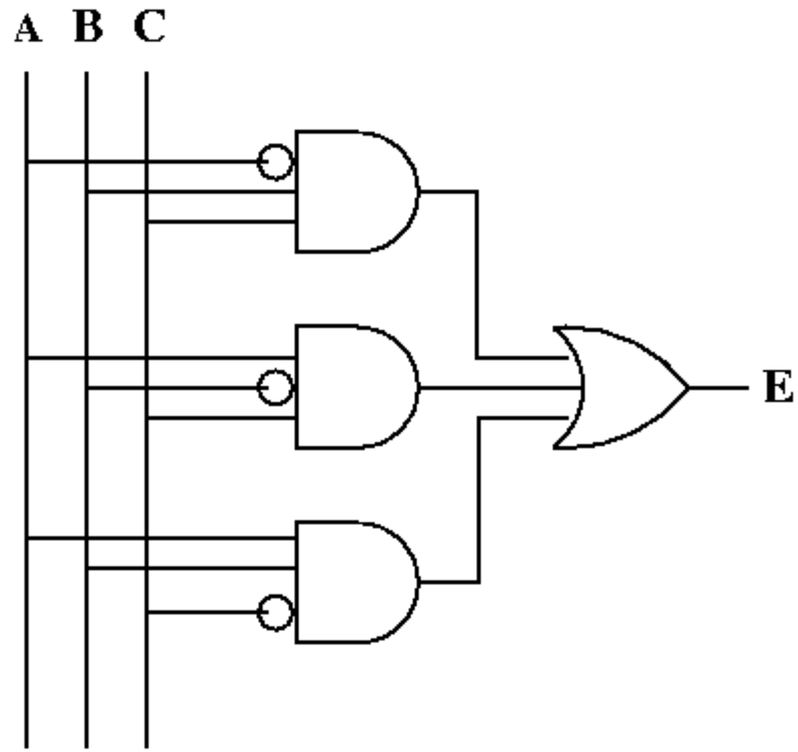
E = (~ABC)+(A~BC)+(AB~C)



Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Realizzare il circuito precedente (riportato qui in figura) nei seguenti casi:

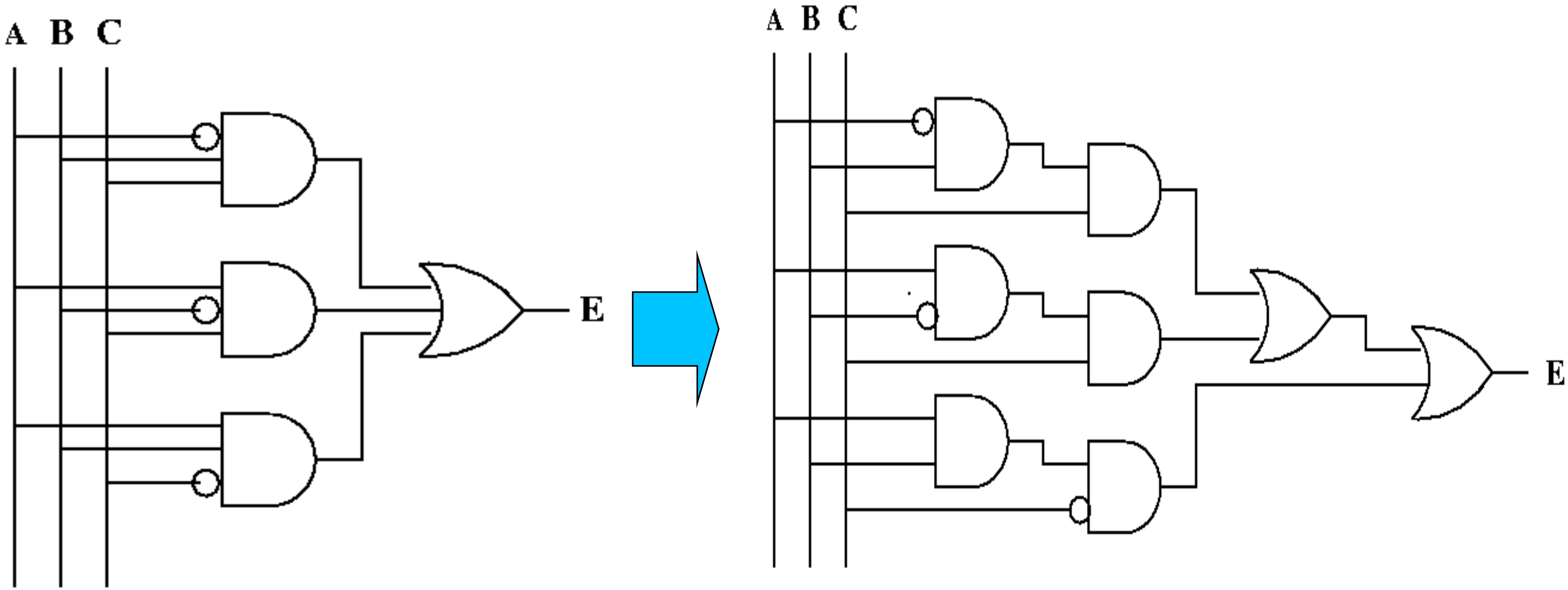
1. utilizzando porte AND e OR a due ingressi
2. utilizzando porte NAND a tre ingressi (ed eventualmente invertitori)



Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: (continua)

Realizzazione utilizzando porte AND e OR a due ingressi



Realizzazione di circuiti combinatori

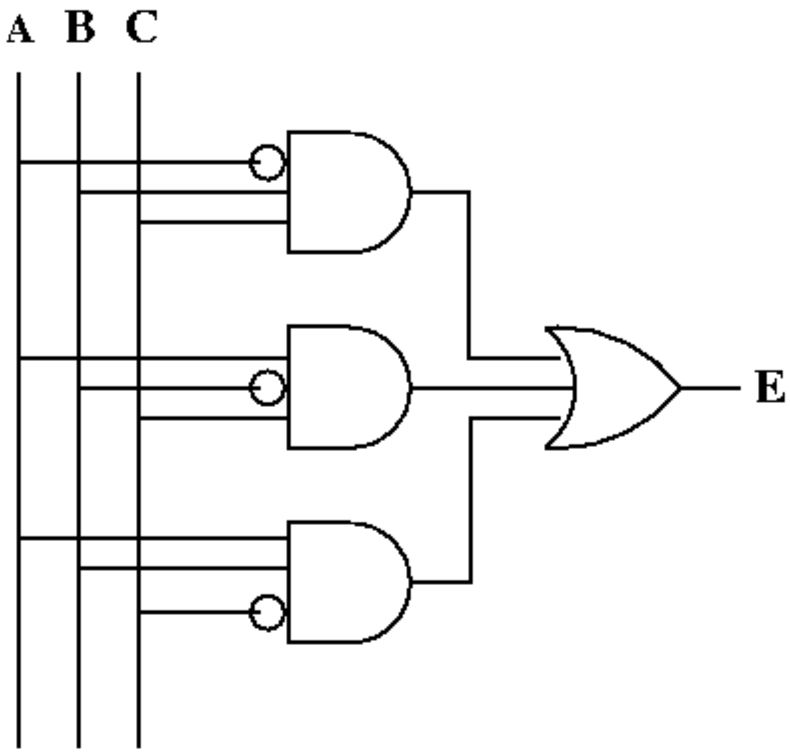
Esercizio: (continua)

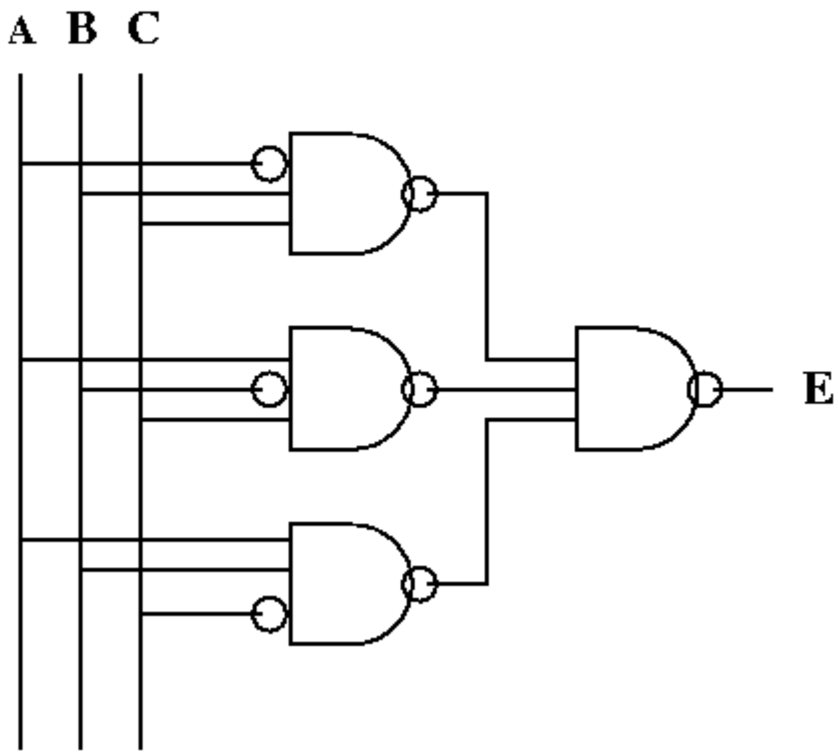
Realizzazione utilizzando porte NAND a tre ingressi e NOT

E = (~ABC)+(A~BC)+(AB~C) = [*applico De Morgan*]

~[~(~ABC) • ~(A~BC) • ~(AB~C)]

NB: Dimostrare l’equivalenza con l’equazione “intuitiva”

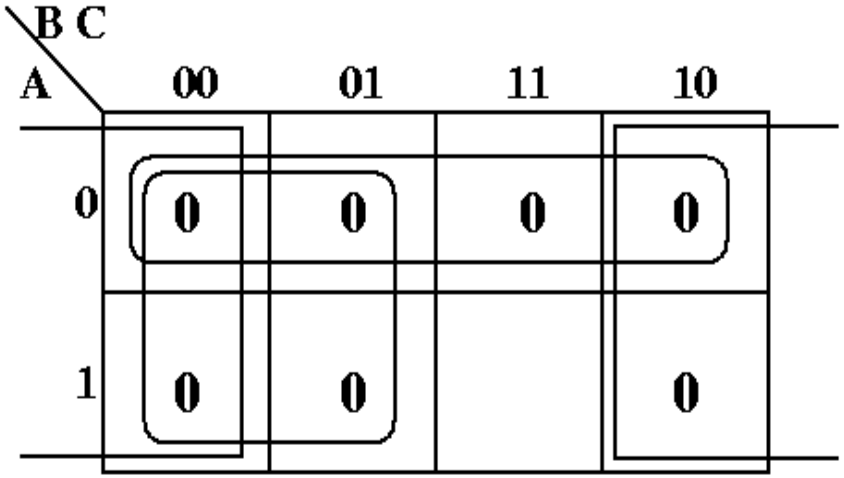




Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Minimizzare la funzione F dell'esercizio precedente espressa come prodotto di somme (PS)

F = (A+B+C) (A+B+~C) (A+~B+C) (A+~B+~C)(~A+B+C) (~A+B+~C)(~A+~B+C)



F = B • A • C

p-sottocubi composti da zeri. Per ottenere le varie somme (PS), in ogni somma devono apparire solo le variabili che rimangono invariate in ogni p-sottocubo. Le variabili appaiono negate quando hanno valori uguali ad 1.

Realizzazione di circuiti combinatori

Esercizio: Dati quattro ingressi A, B, C, D realizzare un circuito che fornisca in uscita il segnale E definito come segue:

- il valore di E è indifferente se gli ingressi sono tutti 0 o tutti 1
- E è 1 se gli ingressi contengono un numero dispari di 1
- E è 0 se gli ingressi contengono un numero pari di 1

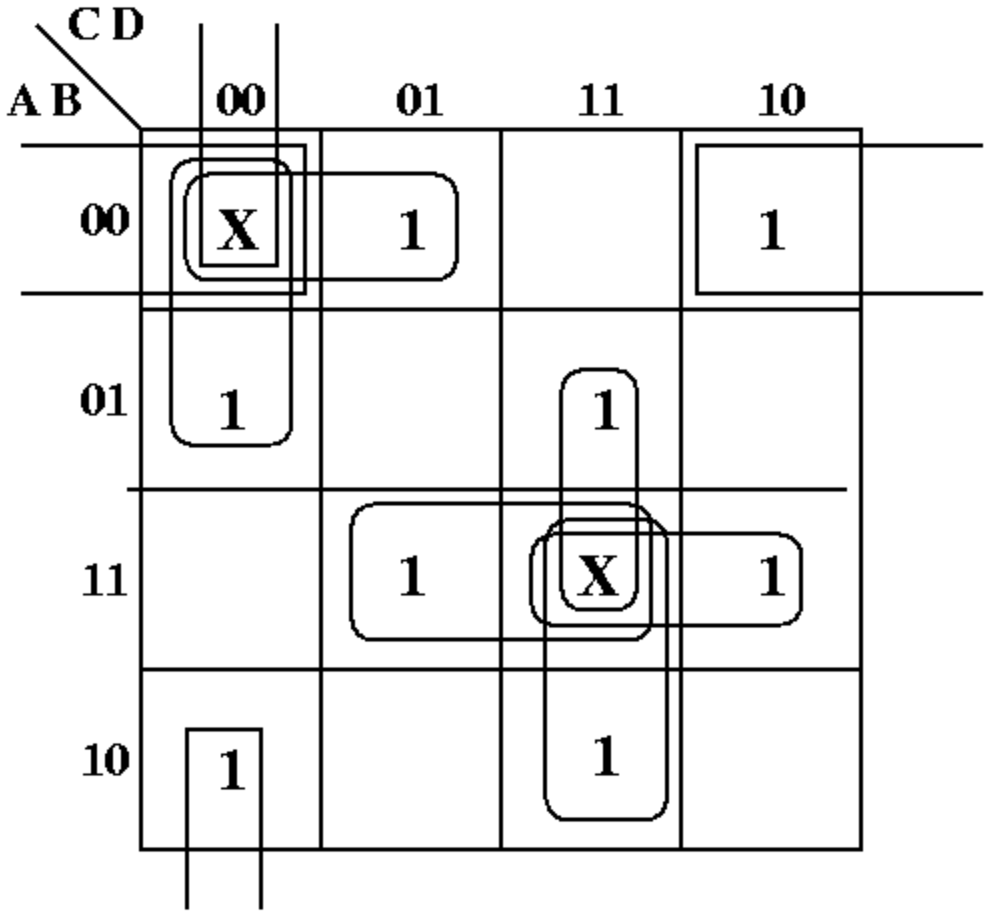
A	B	C	D	E
0	0	0	0	X
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	X

Tabella di verità

Realizzazione di circuiti combinatori

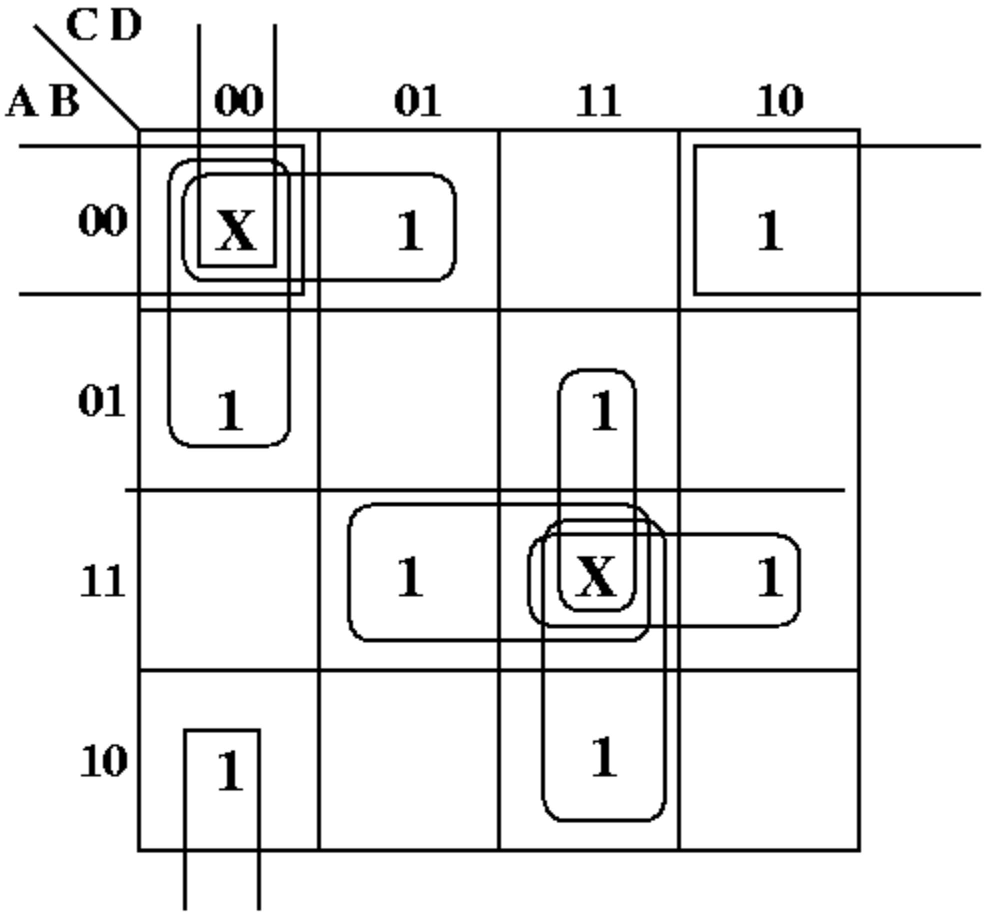
A	B	C	D	E
0	0	0	0	X
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	X

Tabella di verità



Mappa di Karnaugh

Realizzazione di circuiti combinatori



Realizzare il circuito usando porte AND e OR a due soli ingressi

E = ~A~B~C + ~A~C~D + ~B~C~D + ~A~B~D +
BCD + ABC + ABD + BCD